DURÉE : 3 heures

L'épreuve est constituée de quatre problèmes. Ils sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque.

PREMIER PROBLÈME

Soit u un endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ dont la matrice, par rapport à la base canonique de $\mathbb{C}^3$, est :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \end{bmatrix}$$

où α est un nombre donné de $\mathbb{C}$.

1° Déterminer α pour que u soit bijectif. Quelle est dans ce cas la matrice de l'endomorphisme u^{-1} ?

2° On suppose α choisi de telle façon que u ne soit pas bijectif. Déterminer les espaces Im u et Ker u.

La matrice A est-elle diagonalisable ? Si oui, déterminer sa réduite diagonale et la matrice de passage associée.

3° Déduire de ce qui précède l'ensemble des solutions du système

$$\begin{cases} x + y = X \\ x + z = Y \\ y + \alpha z = Z \end{cases}$$

(X, Y, Z) étant un élément donné de $\mathbb{C}^3$. (On discutera suivant les valeurs de α.)

4° On suppose dans cette question $\alpha = 1$

a. La matrice est-elle diagonalisable ?

b. Calculer $(A - I)^3$ où I est la matrice identité, matrice de l'endomorphisme e $(e(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{C}^3)$.
Montrer que $u^3 = au^2 + bu + ce$ a, b, c étant des constantes que l'on déterminera.
(u^2 et u^3 désignent $u \circ u$ et $u \circ u \circ u$ respectivement.)

DEUXIÈME PROBLÈME

Soit f une fonction dérivable dans $\mathbb{R}$ telle que

$$(H) \begin{cases} a.\ f(0) = 0 \\ b.\ f' \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R} \\ c.\ \lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0 \end{cases}$$

1° Donner des exemples de telles fonctions. Si f est une fonction définie par $f(x) = \int_0^x g(t)\,dt$ donner des conditions sur g pour que f obéisse aux conditions (H).

On suppose que f obéit aux conditions (H).

2° *a.* Montrer que $f(x) > 0 \quad \forall x \in]0, +\infty[$.

b. Montrer que la limite de $\frac{f(x)}{x}$ existe lorsque $x \to 0$.

c. Montrer que $f(x) > xf'(x) \quad \forall x \in]0, +\infty[$. Cette inégalité est-elle encore vérifiée lorsque $x < 0$?

d. Montrer que $\frac{f(x)}{x}$ est décroissante minorée sur $]0, +\infty[$. Que peut-on en déduire pour $\frac{f(x)}{x}$ lorsque $x \to +\infty$?

.../...

ENSET 1980 (TA)

TROISIÈME PROBLÈME

On considère l'ensemble E, sous-ensemble des fonctions réelles de variable réelle défini par :

$$E = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \exists M > 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ |f(x) - f(y)| \leqslant M |x - y| \}$$

1° Montrer que E est un sous-espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que si $f \in E$, alors f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

2° Montrer les propriétés suivantes :

a. Si $f \in E$, il existe deux réels A et B tels que

$$|f(x)| \leqslant A |x| + B \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Que peut-on en déduire sur $\dfrac{f(x)}{x}$?

b. Si f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et s'il existe $C > 0$ tel que $|f'(x)| \leqslant C$ $\forall x \in \mathbb{R}$ alors $f \in E$. Que peut-on dire d'une fonction périodique continûment dérivable dans $\mathbb{R}$? Que peut-on dire d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée est continue et admet une limite finie lorsque la variable tend vers $+\infty$ et vers $-\infty$?

3° Les fonctions suivantes appartiennent-elles à E ?

$$x \to \sin x$$
$$x \to \cos x$$
$$x \to \operatorname{sh} x$$
$$x \to \frac{1}{1 + x^2}$$

Donner d'autres exemples de fonctions appartenant à E.

4° Montrer que si f et g sont des éléments de E et sont bornées sur $\mathbb{R}$ alors le produit fg appartient à E.

QUATRIÈME PROBLÈME

On considère l'équation différentielle linéaire :

$$(E) \qquad (1 + x^2)y'' + xy' - k^2 y = 0$$

où k est une constante réelle positive.

1° On effectue le changement de variable

$$t \to x(t) = \operatorname{sh} t$$

dans l'équation E et on pose $y(x(t)) = z(t)$.

Trouver l'équation E' vérifiée par z.

Résoudre E' et en déduire les solutions de E.

2° On suppose $k = \dfrac{1}{2}$.

Montrer que E admet pour solution $x \to y(x) = \sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}}$.

Utiliser ce résultat pour obtenir toutes les solutions de E sans utiliser la première question.

3° Déterminer la solution générale de

$$(1 + x^2)\, y'' + xy' - \frac{y}{4} = 2x^2.$$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail